التمرين الأوّل☹

I - لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-2x^2+2-\ln x$

1. أُدرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
2. احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II - f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ ـ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب ـ بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

جـ ـ حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2. أ ـ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ ـ أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0,4;0,5[$.

ب ـ أنشئ (Δ) و (C_f).

الحل☺

I - لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-2x^2+2-\ln x$

1. دراسة تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\xrightarrow{>}0} -2x^2+2=2$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(-2x+\frac{2}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=-4x-\frac{1}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $-4x<0$ و $-\frac{1}{x}<0$ عندئذ $g'(x)<0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $-$	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

2. حساب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

$g(1)=2(1)^2+2-\ln 1=0$



من أجل $x \in]0;1[$ ، $g(x) > 0$

من أجل $x \in]1;+\infty[$ ، $g(x) < 0$

II - f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{-1+\ln x}{x} - 2x + 2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ **.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty$$

لدينا $\lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{-1+\ln x}{x} = -\infty$ عندئذ $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{-1+\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty$

ب - تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (-2x + 2e) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$ ومنه المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

جـ - تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

$f(x) - y = \frac{-1+\ln x}{x}$ لدينا $x > 0$ ومنه إشارة $f(x) - y$ هي نفس إشارة $-1+\ln x$.

$f(x) - y = 0$ يكافئ $-1+\ln x = 0$ ويكافئ $\ln x = 1$ أي $x = e$.

$f(x) - y > 0$ يكافئ $-1+\ln x > 0$ ويكافئ $\ln x > 1$ أي $x > e$.

x	0	e	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضعية النسبية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(e;0)$	(C_f) فوق (Δ)

2. أ - تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - (-1+\ln x)}{x^2} - 2 = \frac{2 - \ln x - 2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

من أجل $x \in]-\infty;1[$ ، $f'(x) > 0$ ؛ ومن أجل $x \in]1;+\infty[$ ، $f'(x) < 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

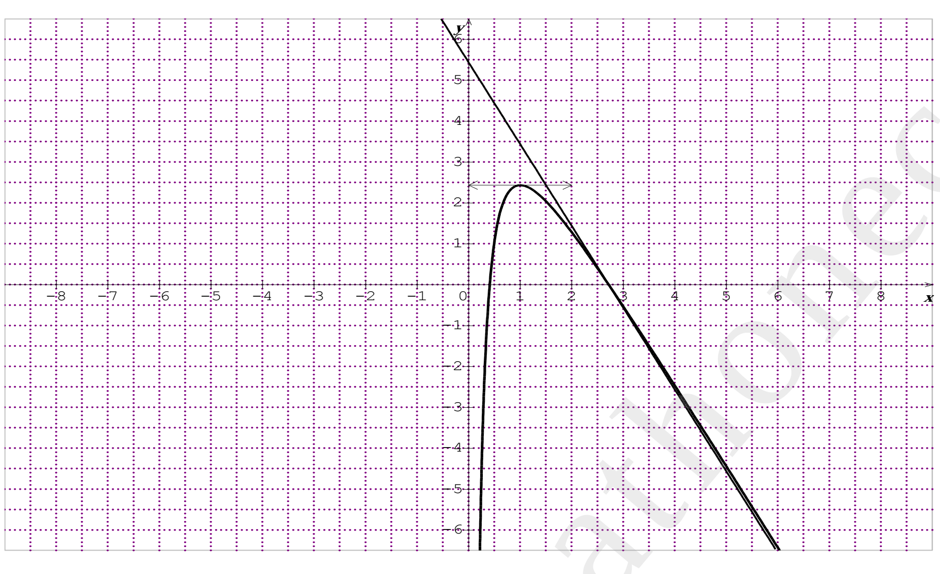
جدول تغيّرات الدالة f .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2e-3$	↘	$-\infty$

3. أ - إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0,4;0,5[$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1]$ وخاصة على المجال $[0,4;0,5]$ ولدينا $f(0,4)\approx -0,15$ و $f(0,5)\approx 1,04$ إذن يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من المجال $]0,4;0,5[$ بحيث $f(x_1)=0$ و هذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

ب - رسم (Δ) و (C_f).



التمرين الثاني☹

I - لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2-2\ln(x)$

1. ادرس تغيّرات الدالة g واحسب $g(1)$.
2. استنتج أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II - f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

جـ - حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

2. أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ - بيّن أنّه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحنى (C_f)، مواز للمستقيم (D).

ب - اكتب معادلة (Δ).

جـ - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$

د - أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f).

هـ - ناقش بيانيا، حسب قيّم العدد الحقيقي m، عدد حلول المعادلة : $mx-2\ln(x)=0$.

الحل☺

I - لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2-2\ln(x)$

1. **ادرس تغيّرات الدالة g واحسب $g(1)$.**

لدينا $\lim_{x\overset{>}{\to}0} 2\ln x=-\infty$ و $\lim_{x\overset{>}{\to}0} x^2+2=2$ عندئذ $\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0} x^2+2-2\ln x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(x+\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

$g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$ لدينا $x>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة x^2-1

x	0		1		$+\infty$
x^2-1	||	$-$	0	$+$	

$g(1)=1+2+2\ln 1=3$

جدول تغيرات الدالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

2. **استنتاج انّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$**، $g(x)>0$.

بما أنّ 3 هي قيمة حدية صغرى للدالة g على المجال $]0;+\infty[$ فإنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $g(x)\geq 3$ وبالتالي $g(x)>0$.

II - f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ **- حساب** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0$ فيكون $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{2\ln x}{x}=+\infty$

ولدينا $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{2\ln x}{x}=-\infty$ فيكون $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0} x+\frac{2\ln x}{x}=-\infty$

ب ـ تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0$ إذن المنحنى (C_f) له مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x$ في جوار $+\infty$.

جـ ـ تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

لدينا $f(x)-x=\frac{2\ln x}{x}$ ؛ إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $\ln x$.

$f(x)-x=0$ يكافئ $\ln x=0$ أي $x=1$

$f(x)-x>0$ يكافئ $\ln x>0$ ويكافئ $x>1$

$f(x)-x<0$ يكافئ $\ln x<0$ ويكافئ $0<x<1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	||	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	||	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

2. أ ـ تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1+2\left[\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}\right]=1+\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{x^2+2-2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ب ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $g(x)>0$ و $x^2>0$ إذن $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. أ ـ تبيين أنّه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f)، موازٍ للمستقيم (Δ).

(T) يوازي (Δ) يعني $f'(x_0)=1$.

$f'(x_0)=1$ يكافئ $\frac{g(x_0)}{x_0^2}=1$ ويكافئ $x_0^2+2-2\ln x_0=x_0^2$ ويكافئ $\ln x_0=1$ أي $x_0=e$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) موازيا لـ(Δ) في النقطة التي إحداثيتيها $\left(e;e+\frac{2}{e}\right)$.

ب ـ كتابة معادلة (Δ).

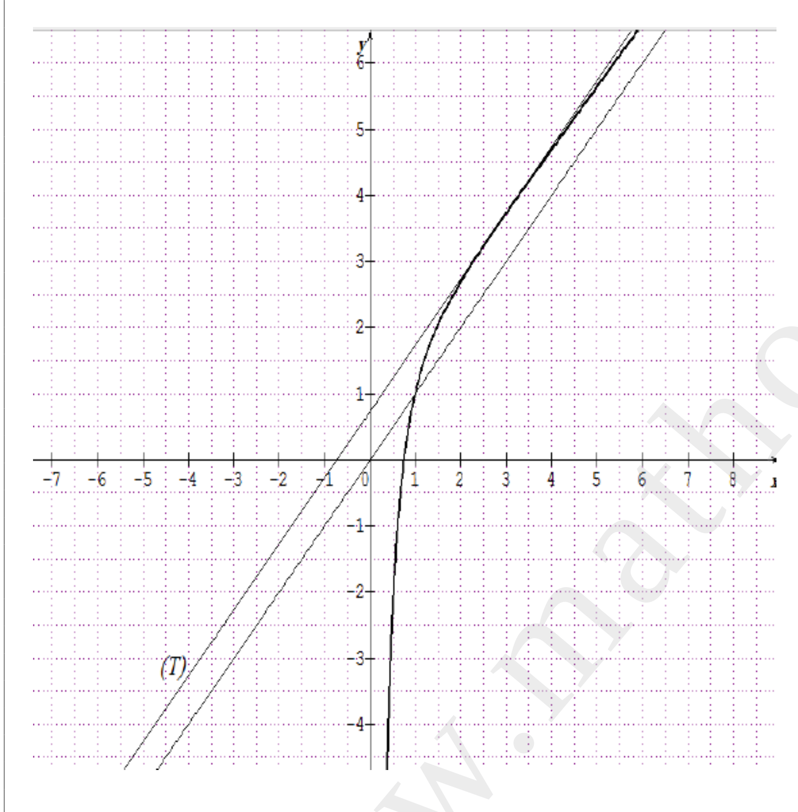
$y=f'(e)(x-e)+f(e)$ ومنه $y=(x-e)+e+\frac{2}{e}$ أي $y=x+\frac{2}{e}$.

جـ ـ تبيين أنّ المنحنى (C_f) **يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها** α **حيث** $\frac{1}{2}<\alpha<1$

لدينا الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,5;1]$ و $f(0,5)\approx -2,27$ ، $f(1)=1$

أي $f(0,5)\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]0,5;1[$ بحيث $f(\alpha)=0$ وبما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن α وحيد أي (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0,5<\alpha<1$

د ـ رسم المستقيمين (Δ) **و** (T) **والمنحنى** (C_f).



هـ ـ المناقشة بيانيا، حسب قيّم العدد الحقيقي m،
عدد حلول المعادلة : $mx-2\ln(x)=0$.

$mx-2\ln(x)=0$ تكافئ $mx=2\ln(x)$

وتكافئ $m=\frac{2\ln(x)}{x}$ وتكافئ

$x+m=x+\frac{2\ln(x)}{x}$ أي $f(x)=x+m$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$

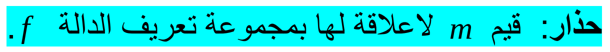
بقراءة بيانية:

إذا كان $m\leq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا واحدا.

إذا كان $0<m<\frac{2}{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m=\frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m>\frac{2}{e}$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا.


حذار: قيم m لاعلاقة لها بمجموعة تعريف الدالة f.

التمرين الثالث☹

I- h دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
2. بيّن أنّه، من أجل x من $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$، ثمّ شكّل جدول تغيّرات h.
3. احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيّم x.

II- f دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ب - باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أنّ: $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

جـ - استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

هـ - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّرات f .

3. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

4. ارسم (C_f) .

الحل☺

I- h دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1. **حساب** $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \ln(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x^2+2x=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x=+\infty$

2. **تبيين أنّه، من أجل كل** x **من** $]-1;+\infty[$ **:** $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ **.**

$$h'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $h'(x)>0$ وعليه الدالة h متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات h **.**

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	$+$
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

3. **حساب** $h(0)$

$h(0)=0^2+2(0)+\ln(0+1)=0$

استنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيّم x.

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	||	$-$	0	$+$	

II- f دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ ـ **حساب** $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} f(x)$ **وفسّر النتيجة بيانيا.**

$\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\ln(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} x+1=0^+$

ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$.

ب ـ **باستخدام النتيجة** $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، **برهن أنّ:** $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

نضع $u=e^t$ عندئذ $t=\ln u$ إذا كان t يئول إلى $+\infty$ فإنّ u يئول إلى $+\infty$.

ومنه $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{\ln u}=+\infty$ وعليه $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{u}{\ln u}}=0$

جـ ـ **استنتاج** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$

د ـ **احسب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ **واستنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى** (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ ؛ إذن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) معادلته $y=x-1$

هـ ـ **دراسة وضعية المنحنى** (C_f) **بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.**

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

لدينا $f(x)-y=\dfrac{-\ln(x+1)}{x+1}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $x+1>0$ ومنه إشارة $f(x)-y$ هي نفس إشارة $-\ln(x+1)$.

$f(x)-y=0$ يكافئ $-\ln(x+1)=0$ ويكافئ $\ln(x+1)=0$ ويكافئ $x+1=1$ أي $x=0$

$f(x)-y>0$ يكافئ $-\ln(x+1)>0$ ويكافئ $\ln(x+1)<0$ ويكافئ $0<x+1<1$ أي $-1<x<0$

$f(x)-y<0$ يكافئ $-\ln(x+1)<0$ ويكافئ $\ln(x+1)>0$ ويكافئ $x+1>1$ أي $x>0$.

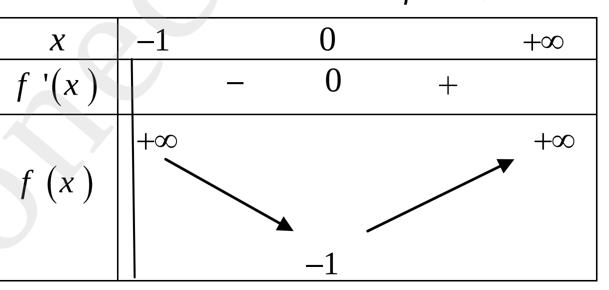
x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;-1)$	(C_f) تحت (Δ)	

2.تبيين أنّه، من أجل كل x **من** $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=1-\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $h(x)$.

جدول تغيّرات f .

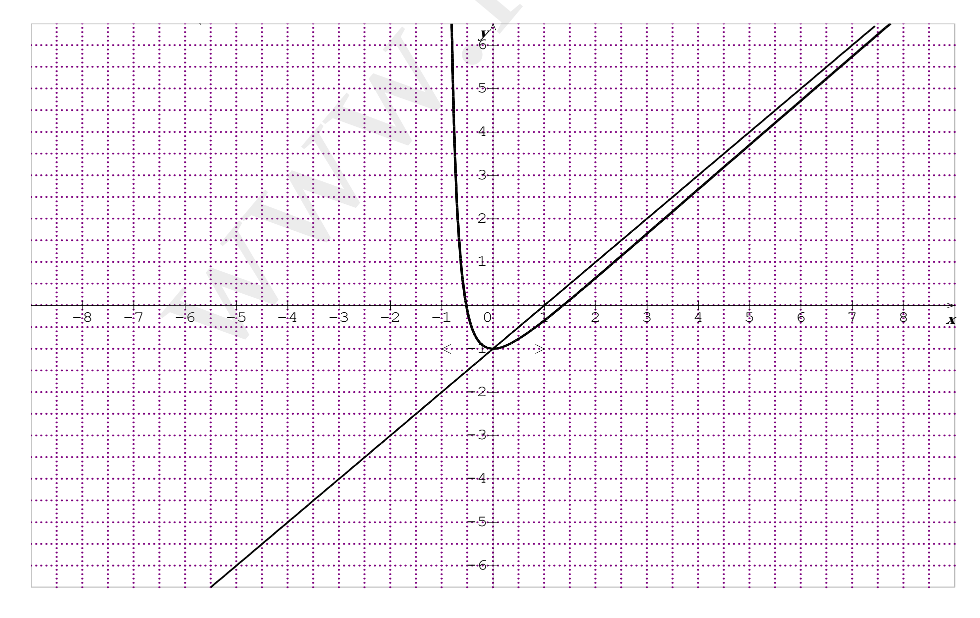


x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3.تبيين أنّ المنحنى (C_f) **يقطع المستقيم ذو المعادلة** $y=2$ **عند نقطة فاصلتها محصورة بين** $3,3$ **و** $3,4$.

الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ بالتالي هي مستمرة على المجال $[3,3;3,4]$ ولدينا $f(3,3)\approx 1,96$ و $f(3,4)\approx 2,06$ أي $f(3,3)<2<f(3,4)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]3,3;3,4[$ بحيث $f(\alpha)=2$ أي (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها α محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

4.رسم (C_f) .



سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

التمرين الرابع☹

I- g هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1. ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكل جدل تغيراتها.
2. أ **)** بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل على المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1{,}5<\alpha<2$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II- f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ فسّر النتائج هندسيا.

ب) عبّر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ واستنتج تغيرات الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.

2. بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
3. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
4. ارسم (Δ) و (C_f).
5. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+m$.

III- h هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{|\ln x|}{x^2+1}$

اشرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h اعتمادا على (C_f)، ثمّ ارسم (C_h).

الحل☺

I- g هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1. دراسة تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكل جدل تغيراتها.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=1$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x^2\ln x=0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1+x^2=1$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)=-\infty$$

$$g'(x)=2x-2\left(2x\ln x+\frac{1}{x}.x^2\right)=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $-4x<0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$.

من أجل $x\in]0;1[$ ، $\ln x<0$ ومنه $g'(x)>0$

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$ ، $\ln x>0$ ومنه $g'(x)<0$

بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

جدول تغيرات الدّالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

2. أ)تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل على المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1,5<\alpha<2$.

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1]$ وتأخذ قيمها في المجال $]1;2]$ و $0 \notin]1;2]$ إذن على المجال $]0;1]$ ، $g(x)\neq 0$.

ولدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2]$ و $0\in]-\infty;2]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$؛ وبما أنّ $g(1,5)\approx 1,42$ و $g(2)\approx -0,55$ أي $g(1,5)\times g(2)<0$ فإنّ $1,5<\alpha<2$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II- f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)أ) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2+1=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{x}{x^2+1}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$.

تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (محور الفواصل) بجوار $+\infty$.

ب) التعبير عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x^2+1)-2x\ln x}{(x^2+1)^2}=\frac{\frac{(x^2+1)-2x^2\ln x}{x}}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)-2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}=\frac{g(x)}{x(x^2+1)^2}$$

واستنتاج تغيرات الدالة f

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $x(x^2+1)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

إذن الدّالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

2. تبيين أنّ $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$

لدينا $g(\alpha)=0$ يكافئ $1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha=0$ أي $\ln\alpha=\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

إذن $f(\alpha)=\dfrac{\ln\alpha}{\alpha^2+1}=\dfrac{\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{\alpha^2+1}=\dfrac{\alpha^2+1}{2\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)}=\dfrac{1}{2\alpha^2}$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

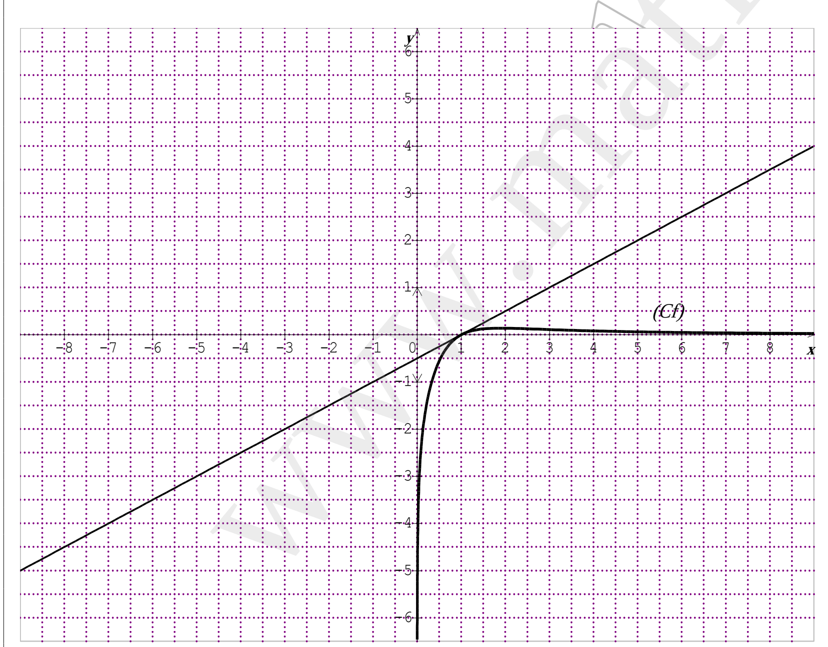
لدينا $1,5<\alpha<2$ معناه $2,25<\alpha^2<4$ ويكافئ $4,5<2\alpha^2<8$ ويكافئ $\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{2\alpha^2}<\dfrac{1}{4,5}$ أي

$0,12<f(\alpha)<0,23$

3. كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$ أي $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

4. رسم (Δ) و (C_f).



5. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي

m، **عدد حلول المعادلة:** $f(x)=\dfrac{1}{2}x+m$.

إذا كان $m<-\dfrac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m=-\dfrac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا.

إذا كان $m>-\dfrac{1}{2}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

III- h هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{|\ln x|}{x^2+1}$

شرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h اعتمادا على (C_f)،

لدينا $\begin{cases} h(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1};\ln x\geq 0 \\ h(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2+1};\ln x\leq 0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases} h(x)=f(x);x\in[1;+\infty[\\ h(x)=-f(x);x\in]0;1]\end{cases}$.

إذن في المجال $[1;+\infty[$ يكون (C_h) منطبق على (C_f)

وفي المجال $]0;1]$، (C_h) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

<u>التمرين الخامس</u>☹

f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$، نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدةالطول $2cm$

1. أ ـ احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)$ و فسّر النتيجتين بيانيا.

ب ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

جـ ـ ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها.

2. أ ـ بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطافE يطلب تعيين إحداثييها.

ب ـ اكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O.

3. ارسم (Δ)، (D) و (C).

4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m، عدد حلول المعادلة $m^x=x$.

<u>الحل</u>☺

f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$، نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدةالطول$2cm$

1. أ ـ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} x=0^+$.

تفسير النتيجتين بيانيا.

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإنّ (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (محور الفواصل)

و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)=-\infty$ ومنه (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب)

ب ـ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

جـ ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $1-\ln x$.

$f'(x)=0$ معناه $1-\ln x=0$ ويكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f'(x)>0$ معناه $1-\ln x>0$ ويكافئ $\ln x<1$ أي $0<x<e$

$f'(x)<0$ معناه $1-\ln x<0$ ويكافئ $\ln x>1$ أي $x>e$.

إذن الدّالة f متزايدة تماما على $]0;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

2. أ ـ تبيين أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثييها.

$$f''(x)=\frac{\frac{-1}{x}.x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-1-2+2\ln x}{x^3}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $x^3>0$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي من نفس إشارة $-3+2\ln x$.

$f''(x)=0$ معناه $-3+2\ln x=0$ وتكافئ $\ln x=\frac{3}{2}$ أي $x=\sqrt{e^3}$

$f''(x)>0$ معناه $-3+2\ln x>0$ و تكافئ $\ln x>\frac{3}{2}$ أي $x>\sqrt{e^3}$

x	0		$\sqrt{e^3}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم عند العدد $\sqrt{e^3}$ وتغير من إشارتها بجوار $\sqrt{e^3}$ ومنه النقطة $E\left(\sqrt{e^3};f\left(\sqrt{e^3}\right)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C).

جـ ـ كتابة معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O.

معادلة المماس من الشكل $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$O\in(D)$ معناه $0=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ وتكافئ $-x_0\left(\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}\right)+\frac{\ln x_0}{x_0}=0$ وتكافئ $\frac{-1+2\ln x_0}{x_0}=0$

وتكافئ $\ln x_0 = \frac{1}{2}$ أي $x_0 = \sqrt{e}$

إذن معادلة المماس هي $y = f'\left(\sqrt{e}\right)x$ أي $y = \frac{1}{2e}x$

3. رسم (D) و (C).

4. المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m، عدد حلول المعادلة $m^x = x$.

$m^x = x$ تكافئ $\ln m^x = \ln x$ وتكافئ $x \ln m = \ln x$

وتكافئ $\ln m = \frac{\ln x}{x}$ أي $f(x) = \ln m$

إذا كان $0 < m \leq 1$ فإنّ $\ln m \leq 0$ وبالتالي المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $1 < m < e^{\frac{1}{e}}$ فإنّ $0 < \ln m < \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل حلين متمايزين

إذا كان $m = e^{\frac{1}{e}}$ فإنّ $\ln m = \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m > e^{\frac{1}{e}}$ فإنّ $\ln m > \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة ليس لها حلول.

التمرين السادس☹

I) الدّالة العددية g معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.
2. احسب $g(1)$ ثمّ استنتج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العدديـــة f معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

1. أ ـ احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ب ـ احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2. أ ـ بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f.

ب ـ شكل جدول تغيّرات الدّالة f.

3. أ ـ بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب ـ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

4. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ يمسّ المنحنى في نقطة A يطلب تعيين إحداثيتيها.

5. ارسم (Δ)، (D) و (C_f).

الحل☺

I) الدّالة العددية g معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g.

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=-2x-\frac{1}{x}$

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$، $g'(x)<0$ وبالتالي الدّالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

2. حساب $g(1)$ واستنتاج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

$g(1)=1-1^2-\ln 1=0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) الدّالة العدديـــة f معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$

1. أ ـ حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-1-\frac{\ln x}{x}=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$.

ب ـ حساب $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$.

لدينا $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$.

تفسير النتيجة هندسيا.

(C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب).

2. أ ـ تبيين أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x}(x)-\ln x}{x^2}\right]=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{-g(x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$

من أجل $x\in]0;1[$، $g(x)>0$ ومنه $f'(x)<0$.

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$، $g(x)<0$ ومنه $f'(x)>0$

إذن الدّالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

ب ـ جدول تغيّرات الدّالة f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3. أ ـ تبيين أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x}=0$ ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

لدينا $f(x)-(x-1)=\frac{-\ln x}{x}$ ومنه إشارة $f(x)-(x-1)$ هي عكس إشارة $\ln x$.

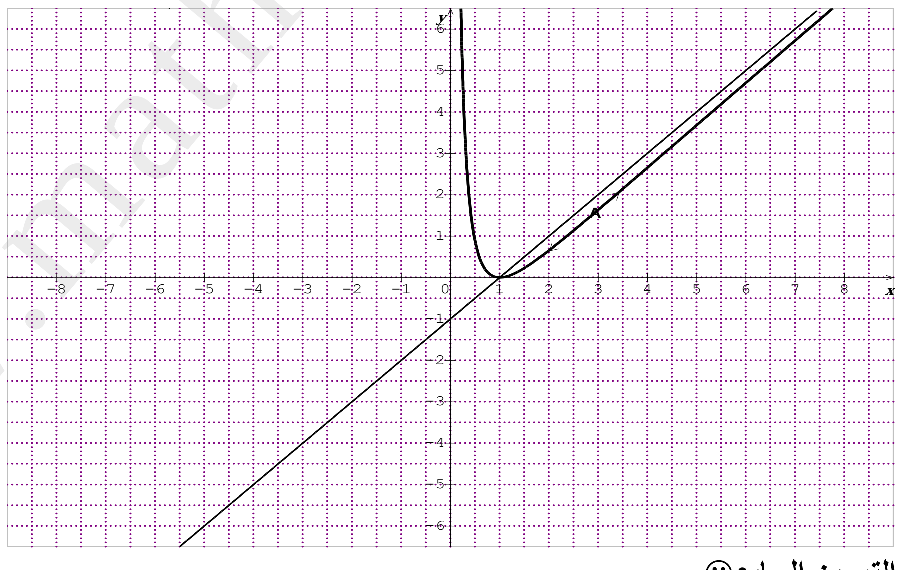
x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$	(C_f) تحت (D)

4. تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1-\frac{1}{e}$ يمسّ المنحنى (C_f) في نقطة A يطلب تعيين إحداثيتيها.

$f'(x_0)=1$ تعني $\frac{-g(x)}{x^2}=1$ ويكافئ $x^2-1+\ln x=x^2$ ويكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$

ولدينا $f(e)=e-1-\frac{1}{e}$ و $y=e-1-\frac{1}{e}$ إذن المستقيم (Δ) يمسّ المنحنى (C_f) في النقطة $A\left(e;e-1-\frac{1}{e}\right)$

5. رسم (Δ)، (D) و (C_f).



التمرين السابع☹

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ فسّر النتائج هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكل جدول تغيراتها.



2) أ) ادرس وضعية المنحنى $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $\left(C_f\right)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و $\left(C_f\right)$.

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

وليكن $\left(C_h\right)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ المنحنى $\left(C_h\right)$ إعتمادا على المنحنى $\left(C_f\right)$.

جـ) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

الحل☺

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ) حساب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **.**

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} 1+\dfrac{2\ln x}{x}=-\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ ومنه $=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2\ln x}{x}$

تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=-\infty$ إذن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب).

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذن $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f **على المجال** $]0;+\infty[$ **.**

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $x^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $1-\ln x$.

$f'(x)=0$ تعني $1-\ln x=0$ يكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f'(x)>0$ تعني $1-\ln x>0$ يكافئ $\ln x<1$ أي $0<x<e$

$f'(x)<0$ تعني $1-\ln x<0$ يكافئ $\ln x>1$ أي $x>e$.

إذن الدّالة f متزايدة تماما على $]0;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$1+\frac{2}{e}$	↘	1

2) أ)دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

لدينا $f(x)-1=\frac{2\ln x}{x}$

$f(x)-1=0$ معناه $\frac{2\ln x}{x}=0$ تكافئ $\ln x=0$ أي $x=1$.

$f(x)-1>0$ معناه $\frac{2\ln x}{x}>0$ تكافئ $\ln x>0$ أي $x>1$

$f(x)-1<0$ معناه $\frac{2\ln x}{x}<0$ تكافئ $\ln x<0$ أي $0<x<1$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-1$	||	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	||	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

ب)كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=2(x-1)+1$ أي $(T):y=2x-1$

جـ)تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

الدالة f مستمرة على المجال $]0;1[$ فهي مستمرة على المجال $\left[e^{-0,4};e^{-0,3}\right]$ ولدينا $f(e^{-0,4})\approx-0,19$ ، $f(e^{-0,3})\approx 0,19$ أي $f(e^{-0,4})\times f(e^{-0,4})<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $\left]e^{-0,4};e^{-0,3}\right[$ بحيث $f(\alpha)=0$ وبما أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $]0;1[$ فإنّ α وحيد .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$.

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم:

$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=\frac{2\ln|x|}{|x|}-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$

ولدينا $h(x)-h(-x)=0$ ومنه $h(x)=h(-x)$ إذن الدّالة h زوجية.

ب) الرسم

جـ) المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m،

عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

$\ln x^2=(m-1)|x|$ تكافئ $m=\frac{\ln x^2}{|x|}+1$ تكافئ

$m=\frac{2\ln|x|}{|x|}+1$ أي $h(x)=m$.

حلول المعادلة إن وُجدت هي فواصل النقط المشتركة بين (C_h) والمستقيم الأفقي ذي المعادلة $y=m$.

إذا كان $m\le 1$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $1<m<1+\frac{2}{e}$ فإنّ المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m=1+\frac{2}{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

$m>1+\frac{2}{e}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

التمرين الثامن☹

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln(1+e^{-x})$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّه يمكن كتابة $f(x)$ ، على الشكل: $f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln(1+e^{x})$.
2. برهن أنّ الدّالة f زوجية.
3. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
5. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.
6. ارسم (Δ)،(Δ') و (C_f).
7. نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ ـ تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$، $g(x)=f(\ln x)$.

ـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة g.

ب ـ شكّل جدول تغيّرات الدالة g.

الحل☺

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln(1+e^{-x})$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **تبيين أنّه يمكن كتابة $f(x)$ ، على الشكل: $f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln(1+e^{x})$.**

لدينا $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln(1+e^{-x})=f(x)=\frac{1}{2}x+\ln e^{-x}(e^{x}+1)$

$$=\frac{1}{2}x+\ln e^{-x}+\ln(e^{x}+1)$$

$$=\frac{1}{2}x-x+\ln(e^{x}+1)$$

$$=-\frac{1}{2}x+\ln(e^{x}+1)$$

2. **إثبات أنّ الدّالة f زوجية.**

من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإنّ $-x\in\mathbb{R}$ و لدينا $f(-x)=-\frac{1}{2}x+\ln(1+e^{x})=f(x)$ ومنه الدالة f زوجية.

3. **حساب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.**

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln(1+e^{x})=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to-\infty}\ln(1+e^{x})=0$ و $\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)=\lim_{t\to-\infty}f(t)=+\infty$$

4. **دراسة اتجاه تغيّر الدالة f .**

$$f'(x)=\frac{-1}{2}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{-1-e^{x}+2e^{x}}{2(e^{x}+1)}=\frac{e^{x}-1}{2(e^{x}+1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $2(e^{x}+1)>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $e^{x}-1$.

$f'(x)=0$ تعني $e^{x}-1=0$ ويكافئ $e^{x}=1$ أي $x=0$

$f'(x)>0$ تعني $e^{x}-1>0$ ويكافئ $e^{x}>1$ أي $x>0$

$f'(x)<0$ تعني $e^{x}-1<0$ ويكافئ $e^{x}<1$ أي $x<0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

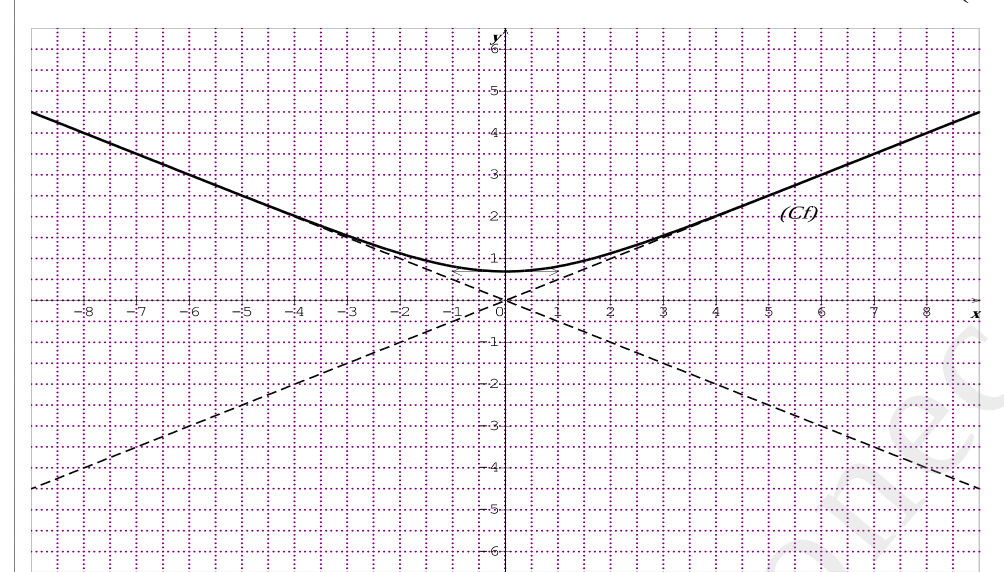
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

5. إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-\frac{1}{2}x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$ إذن للمنحني (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=\frac{1}{2}x$ بجوار $+\infty$.

ولدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)=0$ إذن للمنحني (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ') معادلته $y=-\frac{1}{2}x$ بجوار $-\infty$.

6. رسم (Δ)، (Δ') و (C_f).



7. نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ ـ التحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$، $g(x)=f(\ln x)$.

لدينا $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)=\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln x=-\frac{1}{2}\ln x+\ln\left(e^{\ln x}+1\right)=f(\ln x)$

ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدالة g.

نلاحظ أنّ الدالة g هي مركب الدّالة $\ln$ متبوعة بالدّالة f $(g=f\circ\ln)$

لدينا الدالة اللوغارتمية النيبيرية $\ln$ متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[0;+\infty[$ والدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ إذن للدالتين نفس الإتجاه وبالتالي تركيبهما يكون دالة متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ أي الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

ب ـ جدول تغيّرات الدالة g.

x	1 $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\ln 2$ ↗ $+\infty$

التمرين التاسع☹

I- الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيّرات الدالة g، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) استنتج أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II- f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقق أنّ $0<\alpha<0,5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثمّ المنحنى (C_f).

جـ) عيّن بيانيا قيّم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

الحل☺

I- g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) دراسة تغيّرات الدالة g .

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} g(x)=\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} x^2+2x+4-2\ln(x+1)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} 2\ln(x+1)=-\infty$ و

$\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} x^2+2x+4=3$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+1\left(\frac{x^2+2x+4}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$$

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=2x+2-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2x^2+4x}{x+1}=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $x+1>0$ و $x+2>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x .

إذن الدّالة g متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدّالة g .

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$

2) استنتاج أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

نلاحظ من جدول التغيرات أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)\geq 4$ وبالتالي $g(x)>0$.

II- f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1)أ) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$

تفسير النتيجة بيانيا.

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=-1$.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=x-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x+1)}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$

2)أ) تبيين أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، **حيث** f' **هي مشتقة الدالة** f .

$$f'(x)=1-\dfrac{\dfrac{-2}{x+1}(x+1)-1+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=1-\dfrac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\dfrac{x^2+2x+4-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب)دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

لدينا من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ و $(x+1)^2>0$ إذن $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

جدول تغيّرات الدالة f.

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

جـ) تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ التحقق أن $0<\alpha<0,5$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1;+\infty[$ وبالأخص المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ وبما أنّ $f(0)\times f(0,5)<0$ فإنّ $0<\alpha<0,5$.

3) أ)تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب)دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

لدينا $f(x)-x=-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\dfrac{2\ln(x+1)-1}{x+1}$ ومنه إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $2\ln(x+1)-1$

$f(x)-x=0$ معناه $2\ln(x+1)-1=0$ وتكافئ $\ln(x+1)=\dfrac{1}{2}$ أي $x=\sqrt{e}-1$

$f(x)-x>0$ معناه $2\ln(x+1)-1>0$ وتكافئ $\ln(x+1)>\dfrac{1}{2}$ أي $x>\sqrt{e}-1$

x	-1	$\sqrt{e}-1$	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياها $(\sqrt{e}-1;\sqrt{e}-1)$.

4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

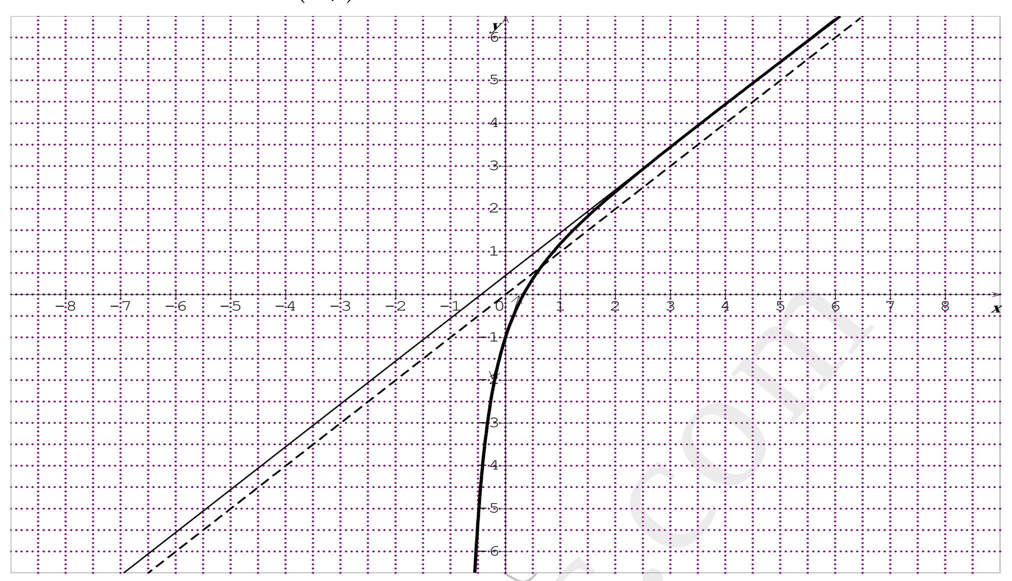
أ)حساب x_0.

المستقيم (T) ميلة يساوي 1 ومنه $f'(x_0)=1$.

$f'(x_0)=1$ معناه $\dfrac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ تكافئ $x_0^2+2x_0+4-2\ln(x_0+1)=x_0^2+2x_0+1$ وتكافئ $\ln(x_0+1)=\dfrac{3}{2}$

أي $x_0=e^{\frac{3}{2}}-1$

ب)رسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثمّ المنحنى (C_f).



جـ)تعيين بيانيا قيّم الوسيط الحقيقي m، بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلّين متمايزين من أجل قيّم m من المجال $\left]0;\frac{2}{\sqrt{e^3}}\right[$.

التمرين العاشر☹

I ـ لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-1-\ln x$

1. ادرس تغيّرات الدّالة g ثم شكل جدول تغيّراتها.
2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.
3. تحقق أنّ $g(1)=1$ وبيّن أنّ المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا آخرا α حيث $0{,}1<\alpha<0{,}3$.

II ـ لتكن الدّالة f المعرّفة على كما يلي: $f(x)=x^2-x\ln x$ و $f(0)=0$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ ـ احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة هندسيا.
   ب ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
2. أ ـ بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$.
   ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f، ثم شكل جدول تغيّراتها.
   جـ ـ بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها.
   د ـ عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.
3. أ ـ أثبت أنّ $f(x)=x\left[g(x)-x+1\right]$ ، ثم احسب $f(\alpha)$.
   ب ـ أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.
4. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1،يطلب كتابة معادلة كل منهما.

5. ارسم (T) ، (T') والمنحني (C_f).

الحل☺

I ـ لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-1-\ln x$

1. دراسة تغيّرات الدّالة g

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0} 2x-1-\ln x=+\infty$ لأنّ $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $2x-1$ لأنّ $x>0$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدّالة g متناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيّرات الدالة g.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ **على المجال** $]0;+\infty[$.

لدينا الدّالة g تقبل قيمة حدية صغرى وهي $\ln 2$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ $g(x)\geq \ln 2$ وبالتالي $g(x)>0$.

3. التحقق أنّ $g(1)=1$

$g(1)=2(1)-1-\ln 1=1$

تبيين أنّ المعادلة $g(x)=1$ **تقبل حلا آخرا** α **حيث** $0,1<\alpha<0,3$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ وبالخصوص على المجال $[0,1;0,3]$ ولدينا $g(0,1)\approx 1,5$ ، $g(0,3)\approx 0,8$ أي $g(0,3)<1<g(0,1)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,1;0,3[$ بحيث $g(\alpha)=1$.

II ـ لتكن الدّالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2-x\ln x$ و $f(0)=0$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ ـ حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x^2 - x\ln x}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x - \ln x = +\infty$$

التفسير: الدالة f لا تقبل الإشتقاق على يمين 0 ومنحناها البياني (C_f) له نصف مماس مواز لمحور التراتيب

ب ـ **حساب** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

2. أ ـ تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x **من المجال** $]0;+\infty[$ **:** $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 2x - \left[\ln x + \frac{1}{x}.x\right] = 2x - 1 - \ln x = g(x)$$

ب ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f.

من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x) > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

جـ ـ بيّن أنّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف ω **يطلب تعيينها.**

لدينا $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي من نفس إشارة $g'(x)$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$f''(x)$ تنعدم من أجل $\frac{1}{2}$ وتغير من إشارتها ومنه النقطة $\omega\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

د ـ تعيين دون حساب $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ **وفسّر النتيجة بيانيا.**

الدالة f تقبل الإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وبالأخص عند α ولدينا:

$\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha) = 1$ ؛ وتفسير ذلك وجود مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها α ميله يساوي 1.

3. أ ـ إثبات أنّ $f(x) = x\left[g(x) - x + 1\right]$ ،

$$f(x) = x^2 - x\ln x = x(x - \ln x) = x(2x - 1 - \ln x - x + 1) = x\left[g(x) - x + 1\right]$$

حساب $f(\alpha)$.

$f(\alpha)=\alpha\left[g(\alpha)-\alpha+1\right]=\alpha(1-\alpha+1)=\alpha(2-\alpha)$.

ب - حصرا لـ $f(\alpha)$.

$0,1<\alpha<0,3$ معناه $-0,3<-\alpha<-0,1$ يكافئ $1,7<2-\alpha<1,9$

ومنه $1,7\times0,1<\alpha(2-\alpha)<1,9\times0,3$ أي $0,17<f(\alpha)<0,57$.

4. إثبات أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1.

$f'(x_0)=1$ يكافئ $g(x_0)=1$ ومنه $x_0=1$ أو $x_0=\alpha$

إذن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1 عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و α.

كتابة معادلة كل منهما.

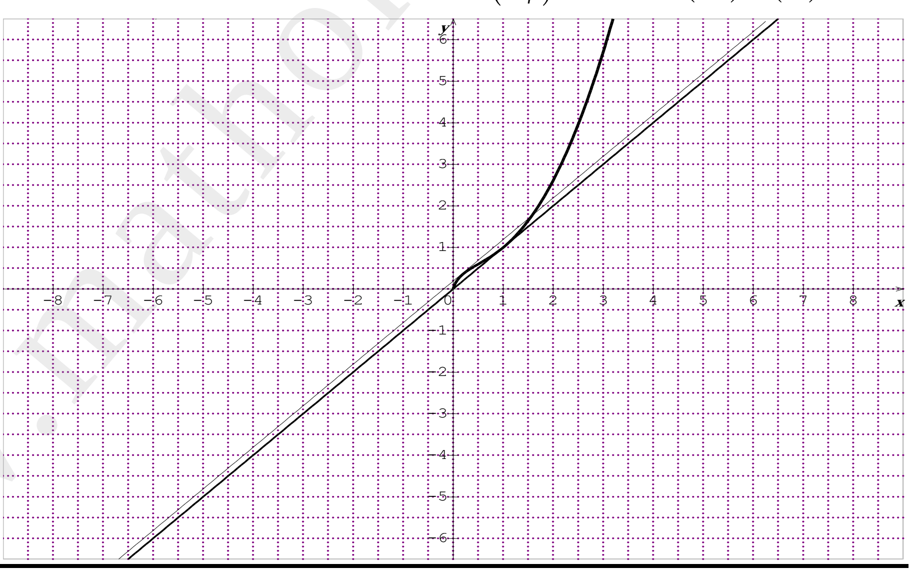
معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=(x-1)+1$ أي $(T):y=x$

معادلة المماس (T') عند النقطة ذات الفاصلة α.

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ ومنه $y=(x-\alpha)+\alpha(2-\alpha)$ أي $(T'):y=x-\alpha^2+\alpha$.

5. رسم (T)، (T') والمنحني (C_f).



التمرين الحادي عشر☹

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيّرات الدالة f.
2. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta):y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.
3. احسب $f(-x)+f(x)$، ماذا تستنتج ؟

4. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-0,71;-0,70[$

5. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب حساب إحداثيات كل منهما، اكتب معادلةالمماس (T).

6. أُرسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

7. ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$

8. h الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x حيث: $h(x)=1+\dfrac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب) دون دراسة تغيّرات h، أُرسم (C_h)، علل ذلك.

الحل☺

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **دراسة تغيّرات الدالة** f .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{2\ln -x}{x}=\lim_{t\to+\infty} 1+\frac{2\ln t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2\ln x}{x}=1$$

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \ln x^2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \dfrac{\ln x^2}{x}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} 1-\dfrac{\ln x^2}{x}=-\infty$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x^2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \dfrac{\ln x^2}{x}=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 1-\dfrac{\ln x^2}{x}=+\infty$.

$$f'(x)=-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-\ln x^2}{x^2}=\frac{\ln x^2-2}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x^2-2$.

$f'(x)=0$ معناه $\ln x^2-2=0$ ويكافئ $\ln x^2=2$ ويكافئ $x^2=e^2$ أي $x=e$ أو $x=-e$

$f'(x)>0$ معناه $\ln x^2-2>0$ ويكافئ $\ln x^2>2$ ويكافئ $x^2>e^2$ أي $x>e$ أو $x<-e$

إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

الدّالة f متزايدة على كل من $]-\infty;-e]$ و $[e;+\infty[$ ومتناقصة على كل من $[-e;0[$ و $]0;e]$.

جدول تغيّرات الدّالة f.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{e+2}{e}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{e-2}{e}$	↗	1

2. **إثبات أنّ المنحنى** (C_f) **يقطع المستقيم** $(\Delta): y=1$ **في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.**

$f(x)=1$ معناه $1-\frac{\ln x^2}{x}=1$ يكافئ $\ln x^2=0$ ويكافئ $x^2=1$ أي $x=1$ أو $x=-1$

إذن $(C_f)\cap(\Delta)=\{A(1;1),B(-1;1)\}$

3. **حساب** $f(-x)+f(x)$.

$$f(-x)+f(x)=1-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+1-\frac{\ln x^2}{x}=2+\frac{\ln x^2}{x}-\frac{\ln x^2}{x}=2$$

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$ ولدينا $f(-x)+f(x)=2$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4. **تبيين أنّ المعادلة** $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **على المجال** $]-0,71;-0,70[$

الدّالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-0,71;-0,70]$ ولدينا $f(-0,71)\approx 0,04$ ، $f(-0,70)\approx -0,02$ أي $f(-0,71)\times f(-0,70)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]-0,71;-0,70[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

5. **إثبات أنّ المنحنى** (C_f) **يقبل مماسا** (T) **يشمل النقطة** $A(0;1)$ **ويمسّ المنحنى** (C_f) **في نقطتين.**

لدينا معادلة المماس (T) من الشكل: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$A(0;1)\in(T)$ معناه $1=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ وتكافئ $-x_0\left(\frac{\ln x_0^2-2}{x_0^2}\right)+1-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=1$

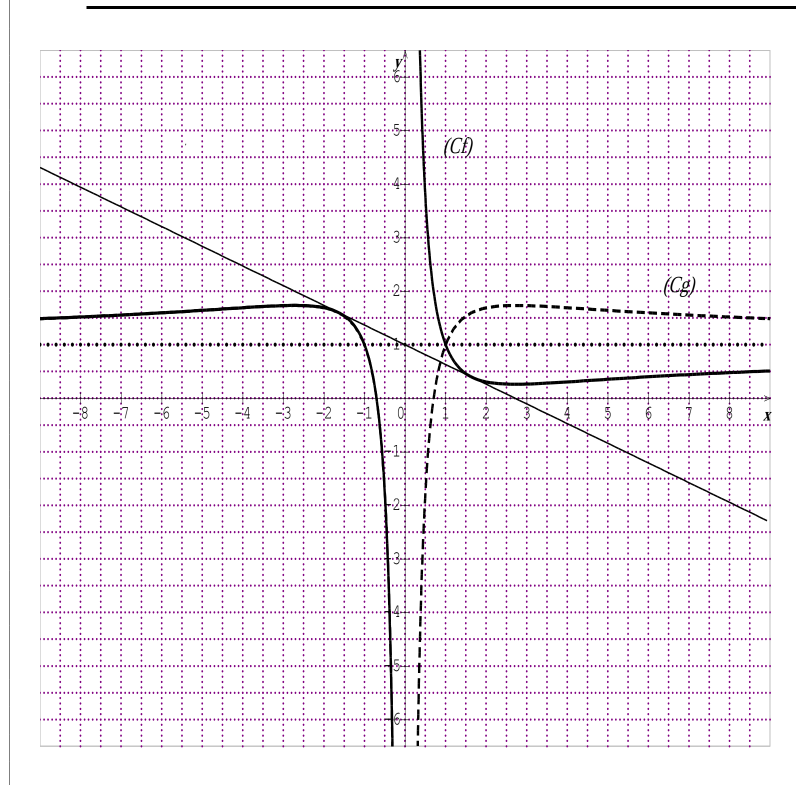
وتكافئ $\left(\frac{-\ln x_0^2+2}{x_0}\right)-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=0$ وتكافئ $\frac{-2\ln x_0^2+2}{x_0}=0$ وتكافئ $\ln x_0^2=1$ ومنه $x_0^2=e$

أي $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$. إذن (C_f) يقبل مماسين يشملان النقطة $A(0;1)$ عند النقطتين اللتين فاصلتيهما $\sqrt{e}$ و $-\sqrt{e}$ ولدينا $f'(\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ و $f'(-\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ إذن المماسان متوازيان وبالتالي هما متطابقان أي أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين إحداثيتيهما $(\sqrt{e};f(\sqrt{e}))$ و $(-\sqrt{e};f(-\sqrt{e}))$.

كتابة معادلة المماس (T).

$y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$ ومنه $y=\frac{-1}{e}x+1$.

6.رسم المماس (T) والمنحنى (C_f).



7.المناقشة بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=mx+1$.

إذا كان $m<-\frac{1}{e}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m=-\frac{1}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان $-\frac{1}{e}<m<0$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m\geq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

8. h الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x حيث: $h(x)=1+\frac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) تبيين أنّ h دالة زوجية.

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$.

ولدينا $h(-x)=1+\frac{\ln(-x)^2}{|-x|}=1+\frac{\ln x^2}{|x|}=h(x)$

$\begin{cases} h(x)=1+\frac{\ln x^2}{x}; x>0 \\ h(x)=1+\frac{\ln x^2}{-x}; x<0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} h(x)=f(-x); x>0 \\ h(x)=f(x); x<0 \end{cases}$

إذن (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty;0[$ وبما أنّ h زوجية فإنّ (C_h) متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.

<u>التمرين الثاني عشر</u>☹

I) الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ وفسّر النتيجتين هندسيا.
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.
3. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الترتيب 0.
4. بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياها.

5. بيّنأنّ المنحنى (C) يقطع المستقيم (d) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}$ في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,4<\alpha<0,5$ و $5,3<\beta<5,4$.

6. ارسم كلا من (T) و (C).

نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي: $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x^2}{2x}$. وليكن (γ) منحناها البياني في المعلم السابق.

1. بيّن أنّ الدّالة g فردية.
2. بيّن أنّ $g(x)=f(x)$ على مجال يطلب تحديده.
3. دون دراسة الدالة g شكل جدول تغيّراتها.
4. اعتمادا على المنحنى (C) اشرح كيفية رسم المنحنى (γ)، ثمّ ارسمه.

الحل☺

I) الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.حساب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

لدينا $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} 1+\ln x=-\infty$ ومنه $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{1+\ln x}{x}=-\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}=0$

تفسير النتيجتين هندسيا

لدينا $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=-\infty$ إذن يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (حامل محور التراتيب)

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (حامل محور الفواصل)

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f.

الدّالة f تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-1-\ln x}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$.

من أجل $x\in]0;1[$، $\ln x<0$ ومنه $f'(x)>0$

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$، $\ln x>0$ ومنه $f'(x)<0$ و $f'(1)=0$.

إذن الدّالة f متزايدة تماما على $]0;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

جدول التغيّرات.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

3. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الترتيب 0.

$f(x_0)=0$ معناه $\frac{1+\ln x_0}{x_0}=0$ تكافئ $1+\ln x_0=0$ أي $x_0=e^{-1}$

ومنه $y=f'(e^{-1})(x-e^{-1})+f(e^{-1})$ أي $y=e^2(x-e^{-1})$ وعليه $(T): y=e^2x-e$

4. تبيين أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياها.

الدالة f تقبل الإشتقاق مرتين على $]0;+\infty[$ ولدينا : $f''(x)=\frac{\left(\frac{-1}{x}\right)x^2+2x\ln x}{x^4}=\frac{-x+2x\ln x}{x^4}=\frac{-1+2\ln x}{x^3}$

إشارة $f''(x)$ هي من نفس إشارة $-1+2\ln x$.

$f''(x)=0$ معناه $-1+2\ln x=0$ ويكافئ $\ln x=\frac{1}{2}$ أي $x=\sqrt{e}$

$f''(x)>0$ معناه $-1+2\ln x>0$ ويكافئ $\ln x>\frac{1}{2}$ أي $x>\sqrt{e}$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

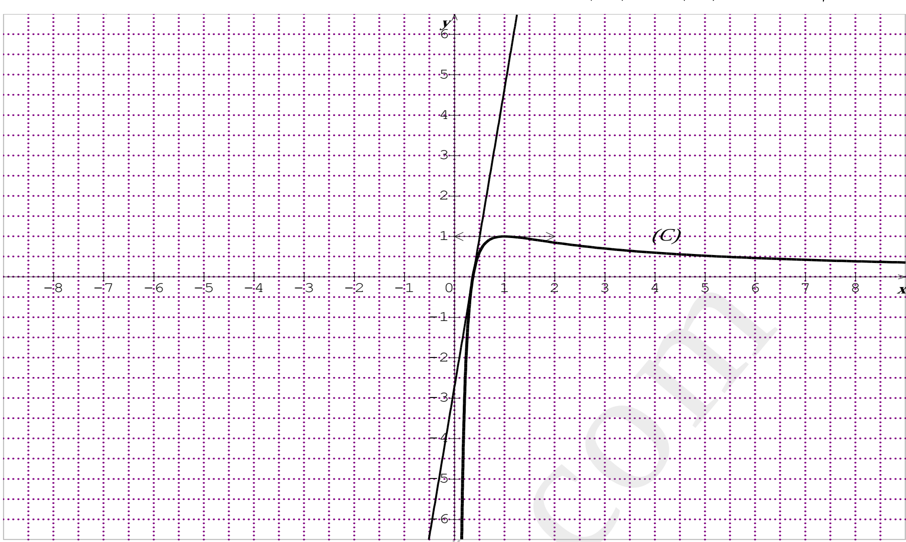
$f''(x)$ تنعدم عند العدد $\sqrt{e}$ وتغيّر من إشارتها بجوار $\sqrt{e}$ ومنه النقطة $\omega\left(\sqrt{e};f\left(\sqrt{e}\right)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).

5. تبيينأنّ المنحنى (C) يقطع المستقيم (d) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}$ في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,4<\alpha<0,5$ و $5,3<\beta<5,4$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1]$ وبالخصوص على المجال $[0,4;0,5]$ ولدينا $g(0,4)\approx 0,20$ ، $g(0,5)\approx 0,61$ إذن $f(0,4)<\frac{1}{2}<f(0,5)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,4;0,5[$ بحيث $f(\alpha)=\frac{1}{2}$

ولدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[5,3;5,4]$ ولدينا $g(5,3)\approx 0,503$ ، $g(5,4)\approx 0,497$ إذن $f(5,4)<\frac{1}{2}<f(5,3)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد β من المجال $]5,3;5,4[$ بحيث $f(\beta)=\frac{1}{2}$ وبالتالي المنحنى (C) يقطع المستقيم (d) ذا المعادلة $y=\frac{1}{2}$ في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,4<\alpha<0,5$ و $5,3<\beta<5,4$.

6. رسم كلا من (T) و (C).



نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x^2}{2x}$. وليكن (γ) منحناها البياني في المعلم السابق.

1. تبيين أنّ الدّالة g فردية.

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x:

$g(-x)=\frac{1}{-x}+\frac{\ln(-x)^2}{-2x}=-\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x^2}{2x}\right)=-g(x)$ ومنه الدّالة g فردية .

2. تبيين أنّ $g(x)=f(x)$ على مجال يطلب تحديده.

لدينا $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{2\ln|x|}{2x}$ ومنه $\begin{cases} g(x)=\frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{2x}; x>0 \\ g(x)=\frac{1}{x}+\frac{2\ln -x}{2x}; x<0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} g(x)=\frac{1+\ln x}{x}; x>0 \\ g(x)=\frac{1+\ln -x}{x}; x<0 \end{cases}$

إذن من أجل $x \in]0;+\infty[$: $g(x)=f(x)$

3. جدول تغيّرات الدّالة g.

x	$-\infty$ -1 0	0 1 $+\infty$
$g'(x)$	0	0
$g(x)$	0 ↘ -1 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ 1 ↘ 0

4. شرح كيفية رسم المنحنى (γ)

(γ)ينطبق على (C_f) في المجال $]0;+\infty[$ وبما أنّ g فردية فإنّ (γ) متناظر بالنسبة إلى O مبدأ المعلم.

<u>التمرين الثالث عشر:</u>

f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right); x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $5cm$

I- g الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$

1. بيّن أنه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2}$
2. ادرس إشارة $g'(x)$ حسب قيم x.
3. شكل جدول تغيّرات الدالة g.
4. برهن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,5<\alpha<0,6$.
5. حدد إشارة $g(x)$.

II- 1. أ. بيّن أنّه، من أجل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$

ب. استنتج إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

2. أ. احسب $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$ ؛ يمكن وضع $t=\frac{1}{x^2}$

ب. استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. أ. بيّن أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x\ln\left(x^2+1\right)-2x\ln x$

ب. احسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

جـ. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

4. أنشئ جدول تغيّرات الدالة f، ثمّ ارسم (C). نأخذ $f(\alpha)\approx 0,8$.

<u>**الحل**</u>☺

f الدالة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right);x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $5cm$

I- g الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$

1. تبيين أنه، من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2}$

$$g'(x)=\frac{\frac{-2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{-2}{x\left(x^2+1\right)}+\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{-2\left(x^2+1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2} + \frac{4x^2}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

2. دراسة إشارة $g'(x)$ حسب قيم x.

من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$ ، $x\left(x^2+1\right)^2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x^2-1.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3. جدول تغيّرات الدالة g.

x	0		α		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$\ln 2-1$	↗	0

4. تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

5. تحديد إشارة $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II- 1. أ.تبيين أنّه، من أجل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\frac{-2x}{x^4}}{\frac{x^2+1}{x^2}}.x$$

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2x}{x^4}.\frac{x^2}{x^2+1}.x = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1} = g(x)$$

ب. استنتاج إتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

2. أ. حساب $\lim_{x\to+\infty} xf(x)$ ؛ يمكن وضع $t=\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

نضع $t=\frac{1}{x^2}$ إذا كان x يؤول إلى $+\infty$ فإنّ t يؤول إلى 0.

ومنه $\lim_{t \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ $\lim_{x\to+\infty} xf(x) =$.

ب. استنتاج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **.**

لدينا $\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 1$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

3. أ. تبيين أنه يمكن كتابة $f(x)$ **على الشكل** $f(x) = x\ln(x^2+1) - 2x\ln x$

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = x\left(\ln(x^2+1) - \ln x^2\right) = x\ln(x^2+1) - 2x\ln x$$

ب. حساب $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$

لدينا $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln x = 0$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln(x^2+1) = 0$

إذن $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln(x^2+1) - 2x\ln x = 0$

جـ. دراسة قابلية اشتقاق الدالة f **عند 0.**

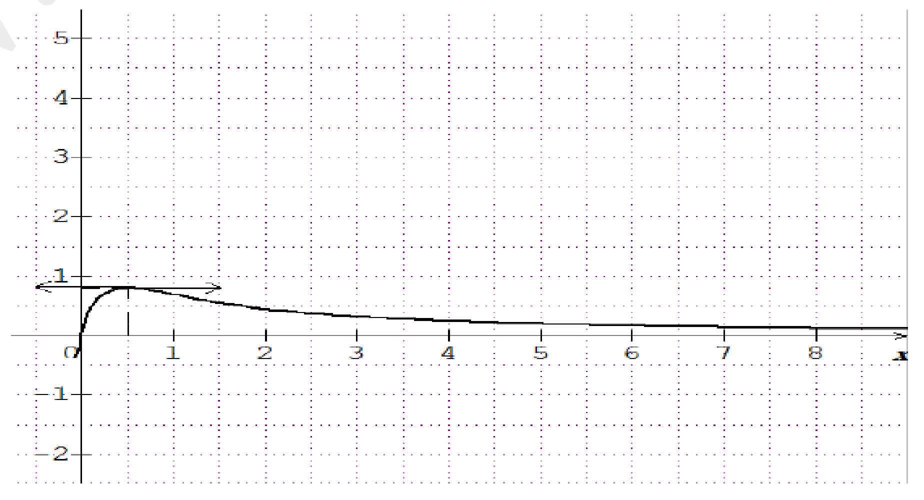
$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

إذن الدالة f لاتقبل الإشتقاق 0.

4. **جدول تغيّرات الدالة** f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

رسم (C).



التمرين الرابع عشر☹

I- g هي الدالة المعرّفة على $]-1;3]$ كما يلي: $g(x)=2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$.

1) ادرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقّق $-0,8<\alpha<-0,7$.

3)عيّن، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

4) h هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب) عيّن اشارة $h'(x)$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة h .

II- f هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-بيّن أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثمّ اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

2- أ)بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0;3]$ ، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f

ب)بيّن أنّ: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$ ، ثمّ عيّن حصرا لـ $f(\alpha)$.

جـ)احسب $f(3)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

3- أ)بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;3]$ فإنّ: $x-\ln(x+1)\geq 0$.

ب)ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

4-عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

5-ارسم (T) ، (T') و (C_f).

6-ناقش بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

الحل☺

I- g هي الدالة المعرّفة على $]-1;3]$ كما يلي: $g(x)=2\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$.

1) دراسة تغيّرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} g(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{1}{x+1}\left[2(x+1)\ln(x+1)-x\right]=+\infty$$

لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} 2(x+1)\ln(x+1)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2t\ln t=0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{1}{x+1}=+\infty$.

$$g(3)=2\ln 4-\frac{3}{4}$$

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $]-1;3]$ ولدينا :

$$g'(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-1}{(x+1)^2}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $2x+1$.

x	-1		$\frac{-1}{2}$		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

نستنتج هكذا أنّ الدّالة g متناقصة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right]$.

جدول تغيّرات الدّالة g.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$g'(x)$	||	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	↘	0	↘	$-2\ln 2+1$	↗	0	↗	$4\ln 2-\frac{3}{4}$

2)تبيين أنّ المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقّق $-0,8<\alpha<-0,7$.

الدّالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $[-2\ln 2+1;+\infty[$ و $0\in[-2\ln 2+1;+\infty[$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$ وكذلك لدينا الدّالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $\left[-2\ln 2+1;4\ln 2-\frac{3}{4}\right]$ و $0\in\left[-2\ln 2+1;4\ln 2-\frac{3}{4}\right]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right]$. وبما أنّ $g(0)=2\ln(0+1)-\frac{0}{0+1}=0$ فإنّ $\beta=0$ ولدينا $g(-0,8)\approx 0,8$ و $g(-0,7)\approx -0,8$ أي $g(-0,8)\times g(-0,7)<0$ ومنه $-0,8<\alpha<-0,7$

3)تعيين، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

x	-1		α		0		3
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

4) h هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$.

أ)حساب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

$$h'(x)=2g'(x)\times g(x)$$

ب) تعيين اشارة $h'(x)$.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$g(x)$	‖	$+$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$	‖	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة h متزايدة تماما على كل من $\left[\alpha;-\frac{1}{2}\right]$ و $[0;3]$ومتناقصة تماما على كل من $]-1;\alpha]$ و $\left[-\frac{1}{2};0\right]$.

جدول تغيّرات الدالة h.

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$(-2\ln 2+1)^2$	↘	0	↗	$h(3)$

II- f هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- تبيين أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=1$$ لأنّ $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0.

كتابة معادلة لـ(T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $(T): y=x$

2- أ) بيّن أنّه، من أجل $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$.

من أجل $x\in]-1;0[\cup]0;3]$، لدينا:

$$f'(x)=\frac{2x\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}.x^2}{(\ln(x+1))^2}=\frac{x\left[2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\right]}{(\ln(x+1))^2}=\frac{xg(x)}{(\ln(x+1))^2}$$

استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f

x	-1		α		0		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	

نستنتج هكذا أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;3]$.

ب) تبيين أنّ: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$ **.**

$g(\alpha)=0$ معناه $2\ln(\alpha+1)-\dfrac{\alpha}{\alpha+1}=0$ تكافئ $\ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}$ تكافئ $\dfrac{2(\alpha+1)}{\alpha}=\dfrac{1}{\ln(\alpha+1)}$

ومنه $\dfrac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)}=\dfrac{2\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha}=2\alpha(\alpha+1)$ أي $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$.

تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$ **.**

$-0,8<\alpha<-0,7$ معناه $-1,6<2\alpha<-1,4$ ويكافئ $1,4<-2\alpha<1,6.........(1)$

ولدينا $0,2<\alpha+1<0,3.........(2)$

إذن $0,28<-2\alpha(\alpha+1)<0,48$ ومنه $-0,48<2\alpha(\alpha+1)<-0,28$ أي $-0,48<f(\alpha)<-0,28$.

جـ) حساب $f(3)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} f(x)$ **.**

$$f(3)=\frac{3^2}{\ln(3+1)}=\frac{9}{\ln 4}$$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} x^2=1$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\ln(x+1)=-\infty$.

جدول تغيّرات الدالة f **.**

x	-1		α		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$\dfrac{9}{\ln 4}$

3- أ)تبيين أنّه من أجل كل x **من المجال** $]-1;3]$ **فإنّ:** $x-\ln(x+1)\geq 0$ **.**

نضع $u(x)=x-\ln(x+1)$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;3]$ لدينا : $u'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$

إشارة $u'(x)$ هي نفس إشارة x.

من أجل $]-1;0[$ ، $u'(x)<0$ ومن أجل $]0;3[$ ، $u'(x)>0$

إذن الدّالة u متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;3[$ ولها قيمة حديّة صغرى على المجال $]-1;3[$ وهي $u(0)=0$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;3[$ ، $u(x)\geq 0$ أي $x-\ln(x+1)\geq 0$.

ب)دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

$$f(x)-x=\frac{x^2}{\ln(x+1)}-x=\frac{x^2-x\ln(x+1)}{\ln(x+1)}=\frac{x\left(x-\ln(x+1)\right)}{\ln(x+1)}=\frac{xu(x)}{\ln(x+1)}$$

$\ln(x+1)>0$ يكافئ $x+1>1$ أي $x>0$

$\ln(x+1)<0$ يكافئ $0<x+1<1$ أي $-1<x<0$

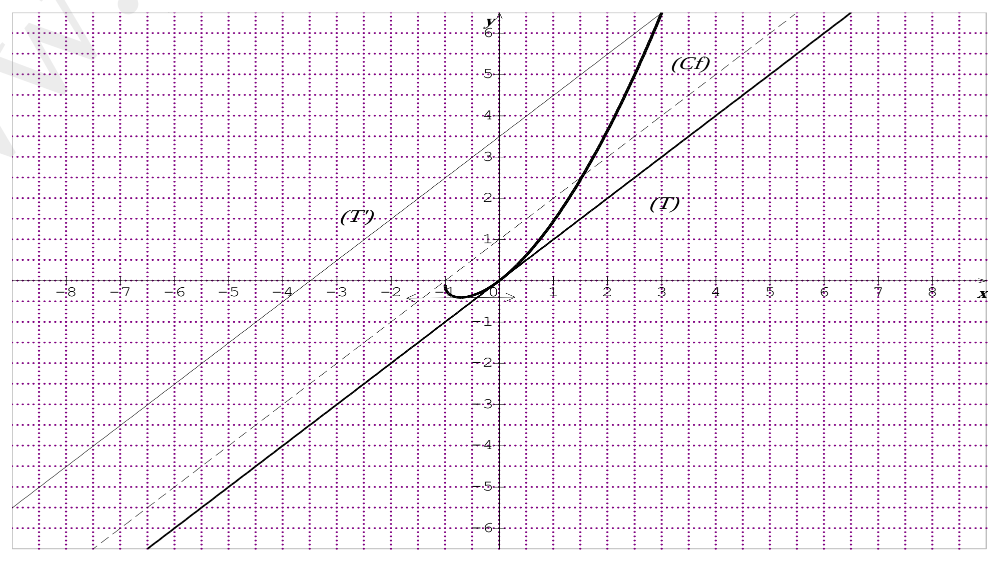
x	-1	0	3
x	$-$	0	$+$
$u(x)$	$+$	0	$+$
$\ln(x+1)$	$-$	0	$+$
$f(x)-x$	$+$	0	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (T)	(T) يمس (C_f) في النقطة O	(C_f) فوق (T)

4-تعيين معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

معادلة المستقيم (T') من الشكل $y=x+b$ وبما أنه يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3 فهو يشمل النقطة $A\left(3;\frac{9}{\ln 4}\right)$ إذن $\frac{9}{\ln 4}=3+b$ ومنه $b=\frac{9}{\ln 4}-3$.

وعليه معادلة المستقيم (T') هي $y=x+\frac{9}{2\ln 2}-3$.

5-رسم (T) ، (T') و (C_f).



سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

6-المناقشة بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

حلول المعادلة إن وُجدت هي فواصل النقط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$.

إذا كان $m<0$ أو $m>\frac{9}{2\ln 2}-3$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $m=0$ فإنّ المعادلة لها حلا واحدا مضاعفا.

إذا كان $0<m<1$ فإنّ المعادلة لها حلان مختلفان.

إذا كان $1\leq m\leq\frac{9}{2\ln 2}-3$ فإنّ المعادلة لها حل وحيد.

التمرين الخامس عشر☹

f دالة معرّفة بـ: $f(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1.أ ـ بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x+e^{-x}\geq 1$.

ب ـ استنتج أنّ f معرّفة على $\mathbb{R}$.

2.أ ـ تحقّق من صحة المعلومات التالية :

ـ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=-x+\ln\left(1+xe^{x}\right)$.

ـ من أجل كل $x\succ 0$ ، لدينا $f(x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

ب ـ عيّن نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

جـ ـ استنتج من السؤال السابق أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

3.ماهي نهاية $\left[f(x)-\ln x\right]$ عند $+\infty$ ؛ ماذا تستنتج ؟

4.ادرس تغيّرات الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

5.ارسم (d)، (C) و (Γ) حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\ln x$.

الحل:

f دالة معرّفة بـ: $f(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1.أ ـ **تبيين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x+e^{-x}\geq 1$.**

نضع $g(x)=x+e^{-x}$

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $g'(x)=1-e^{-x}$.

$g'(x)=0$ معناه $1-e^{-x}=0$ ويكافئ $e^{-x}=1$ أي $x=0$

$g'(x)>0$ معناه $1-e^{-x}>0$ ويكافئ $e^{-x}<1$ ويكافئ $-x<0$ أي $x>0$

$g'(x)<0$ معناه $1-e^{-x}<0$ ويكافئ $e^{-x}>1$ ويكافئ $-x>0$ أي $x<0$.

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ولها قيمة حدية صغرى وهي $g(0)=1$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)\geq 1$ أي $x+e^{-x}\geq 1$.

ب ـ استنتاج أنّ f معرّفة على $\mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $x+e^{-x}\geq 1$ ومنه $x+e^{-x}>0$ إذن الدّالة f معرّفة على $\mathbb{R}$.

2.أ ـ **التحقّق من صحة المعلومات التالية :**

ـ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=-x+\ln(1+xe^{x})$.

$$f(x)=\ln(x+e^{-x})=\ln e^{-x}(xe^{x}+1)=\ln e^{-x}+\ln(xe^{x}+1)=-x+\ln(xe^{x}+1)$$

ـ من أجل كل $x\succ 0$ ، لدينا $f(x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

$$f(x)-\ln x=\ln(x+e^{-x})-\ln x=\ln\left(\frac{x+e^{-x}}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

ب ـ تعيين نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x+e^{-x})=+\infty$$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x+\ln(xe^{x}+1)=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^{x}+1=1$

جـ ـ استنتاج من السؤال السابق أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

لدينا $\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\ln(xe^{x}+1)=0$ ومنه المستقيم (d) مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

3. $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=0$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{e^{-x}}{x}=1$

4.**دراسة تغيّرات الدالة f.**

$f'(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ؛ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $x+e^{-x}>0$ ومنه إشارة هي نفس إشارة $1-e^{-x}$.

$f'(x)>0$ يكافئ $x>0$

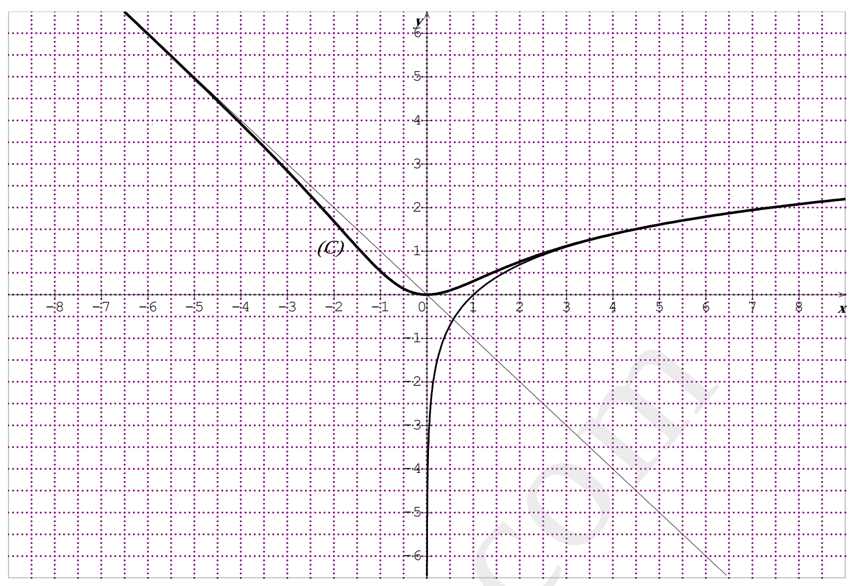
$f'(x)<0$ يكافئ $x<0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

5.رسم (d)،(C)و(Γ) **حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\ln x$.**



التمرين السادس عشر☹

I- الدّالة g معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$.

1- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

3- استنتج، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

II- الدّالة f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2- أثبت أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x+1}$.

3- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

4- بيّن أنّ: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5- مثّل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2]$.

III- (Γ) المنحنى الممثل للدّالة h المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1- أثبت أنّ المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

2- الدّالة k معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ - بيّن أنّ للدالتين k و f نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$.

ب - عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

جـ - بيّن أنّ: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

الحل☺

I- الدّالة g معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=(x+1)^2-2+\ln(x+1)$.

1- دراسة اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

الدّالة g تقبل على الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$g'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $x+1>0$ و $\frac{1}{x+1}>0$ ومنه $g'(x)>0$ إذن الدالة g متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

2-تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31<\alpha<0,32$ وأنّ: $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

الدّالة g مستمرة على $]-1;+\infty[$ لأنها تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ وهي متزايدة تماما على هذا المجال و خاصة على المجال $[0,31;0,32]$ ولدينا $g(0,31)\approx -0,01$ ، $g(0,32)\approx 0,02$ أي $g(0,31)\times g(0,32)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,31;0,32[$ بحيث $g(\alpha)=0$

$g(\alpha)=0$ معناه $(\alpha+1)^2-2+\ln(\alpha+1)=0$ أي $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$.

3- استنتاج، حسب قيّم x إشارة $g(x)$.

من أجل $x\in]-1;\alpha[$ لدينا $g(x)<g(\alpha)$ أي $g(x)<0$

ومن أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ لدينا $g(x)>g(\alpha)$ أي $g(x)>0$ و $g(\alpha)=0$.

II- الدّالة f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-حساب $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$.

$\lim\limits_{x\underset{>}{\to}-1}(2-\ln(x+1))^2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}-1} f(x)=\lim\limits_{x\underset{>}{\to}-1}(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2=+\infty$.

2-إثبات أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2g(x)}{x+1}$.

الدّالة f تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=2(x+1)+2\left(\frac{-1}{x+1}\right)(2-\ln(x+1))=2(x+1)-\frac{2(2-\ln(x+1))}{x+1}=\frac{2(x+1)^2-2(2-\ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{2\left[(x+1)^2-2+\ln(x+1)\right]}{x+1}=\frac{2g(x)}{x+1}$$

3-دراسة اتجاه تغيّر الدالة f .

من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $\frac{2}{x+1}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.

أي f' سالبة على $]-1;\alpha[$ وموجبة على $]\alpha;+\infty[$

نستنتج هكذا أنّ الدالة f متناقصة تماما على $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4-تبيين أنّ: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$

لدينا $\ln(\alpha+1)=2-(\alpha+1)^2$ إذن $f(\alpha)=(\alpha+1)^2+\left(2-\ln(\alpha+1)\right)^2=(\alpha+1)^2+\left(2-\left(2-(\alpha+1)^2\right)\right)^2$

$$f(\alpha)=(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^4=(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)$$

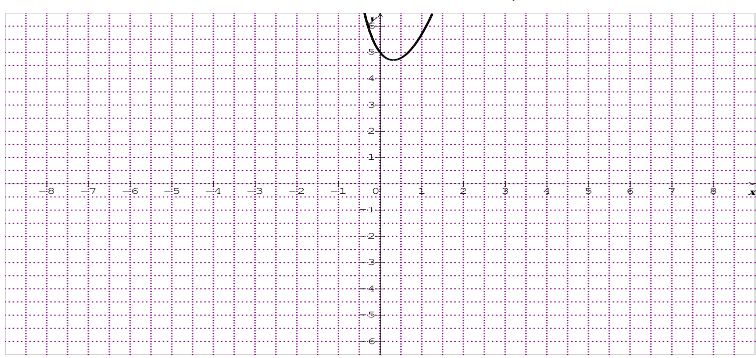
استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

$0,31<\alpha<0,32$ معناه $1,31<\alpha+1<1,32$ يكافئ $1,7161<(\alpha+1)^2<1,7424$ ويكافئ

$2,7161<1+(\alpha+1)^2<2,7424$ ومنه $1,7161\times 2,7161<(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)<1,7424\times 2,7424$ أي

$4,6611<f(\alpha)<4,7789$.

5-تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $[-1;2]$.



III- (Γ) المنحنى الممثل للدّالة h المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=\ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1-إثبات أنّ المسافة AM تعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$.

لدينا $M\left(x;\ln(x+1)\right)$ ومنه

$$AM=\sqrt{(x+1)^2+\left(\ln(x+1)-2\right)^2}=\sqrt{(x+1)^2+\left(2-\ln(x+1)\right)^2}=\sqrt{f(x)}$$

2- الدّالة k معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x)=\sqrt{f(x)}$.

أ - تبيين أنّ للدالتين k و f نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ و هي موجبة على هذا المجال إذن الدالة k تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$

ولدينا $k'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $2\sqrt{f(x)}>0$ ومنه إشارة $k'(x)$ هي نفس إشارة $f'(x)$ وبالتالي للدالتين k و f نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$.

ملاحظة: يمكن إتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين.

ب - تعيين إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

لدينا الدّالة k متناقصة تماما على $]-1;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ فهي تقبل قيمة حدية صغرى على المجال $]-1;+\infty[$ تبلغها من أجل $x=\alpha$ ومنه AMتكون أصغر ما يمكن من أجل $x=\alpha$ أي عند النقطة $B(\alpha;\ln(\alpha+1))$

جـ - تبيين أنّ: $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$.

$$AB=k(\alpha)=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{(\alpha+1)^2\left(1+(\alpha+1)^2\right)}=(\alpha+1)\sqrt{1+(\alpha+1)^2}$$

<u>التمرين السابع عشر</u>☹

I-نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=\ln(1+e^{-x})-\dfrac{1}{1+e^x}$.

1- أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2- ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g وشكل جدول تغيّراتها.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=e^x\ln(1+e^{-x})$.

1- أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يمكن وضع $t=\dfrac{1}{e^x}$).

2-بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=-xe^x+e^x\ln(1+e^x)$.

- استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3- ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f وشكل جدول تغيّراتها.

- استنتج مجموعة صور $\mathbb{R}$ بواسطة الدالة f .

4- بيّن أنّ المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α .

5- ارسم (C_f) منحنى الدالة f في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6- ناقش بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^x\ln(1+e^{-x})-m=0$.

<u>الحل:</u>

I- نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=\ln(1+e^{-x})-\dfrac{1}{1+e^{x}}$.

1- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ **.**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{-x})=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{x}}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{-x})-\dfrac{1}{1+e^{x}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{x}}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})-\dfrac{1}{1+e^{x}}=0$

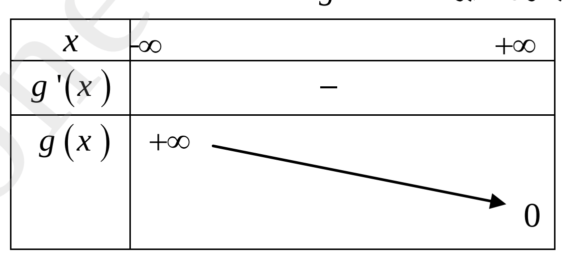
2- دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x:

$$g'(x)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}=\frac{-1}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}=\frac{-1-e^{x}+e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}=\frac{-1}{(1+e^{x})^{2}}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)<0$ وبالتالي الدّالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدّالة g.



x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0

3- استنتلج إشارة $g(x)$ **على** $\mathbb{R}$.

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة g أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $g(x)>0$.

II- لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=e^{x}\ln(1+e^{-x})$.

1- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **.**

نضع $t=\dfrac{1}{e^{x}}$ عندئذ $e^{x}=\dfrac{1}{t}$ إذا كان x يئول إلى $+\infty$ فإنّ t يئول إلى 0.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x}\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\ln(1+t)=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

2- تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x **:** $f(x)=-xe^{x}+e^{x}\ln(1+e^{x})$ **.**

لدينا $f(x)=e^{x}\ln(1+e^{-x})=e^{x}\ln\left(e^{-x}(e^{x}+1)\right)=e^{x}\left[-x+\ln(e^{x}+1)\right]=-xe^{x}+e^{x}\ln(e^{x}+1)$

- استنتاج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **.**

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}\ln(e^{x}+1)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-xe^{x}+e^{x}\ln(e^{x}+1)=0$

3- دراسة اتجاه تغيّر الدّالة f **.**

$$f'(x)=e^{x}\ln(1+e^{-x})-\left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)e^{x}=e^{x}\ln(1+e^{-x})-\frac{1}{1+e^{-x}}=g(x)$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)>0$ ومنه $f'(x)>0$ إذن الدّالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدّالة f .

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	0 ↗ 1

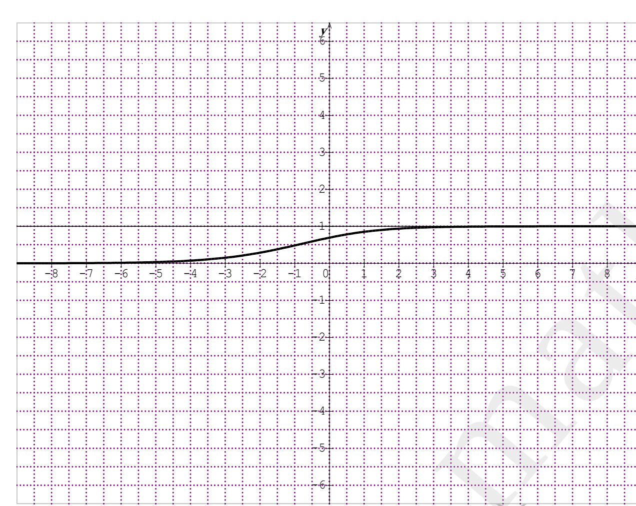
ـ استنتاج مجموعة صور $\mathbb{R}$ بواسطة الدالة f .

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا $f(]-\infty;+\infty[)=]1;2[$

4-تبيين أنّ المعادلة: $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في المجال $]1;2[$ و $\frac{1}{2}\in]1;2[$ إذن المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α .

5-رسم (C_f)



6-المناقشة بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^x\ln(1+e^{-x})-m=0$.

$e^x\ln(1+e^{-x})-m=0$ تكافئ $e^x\ln(1+e^{-x})=m$ أي $f(x)=m$

إذا كان $m\le 0$ أو $m\ge 1$ فإنّ المعادلة لا تقبل أي حل.

إذا كان $0<m<1$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا.

<u>التمرين الثامن عشر☹</u>

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x};\ x\in]0;e[\cup]e;+\infty[\\ f(0)=-1 \end{cases}$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

(1 أ) بين أنَ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1$ (يمكن وضع $t=\ln x$) ثم أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين .

ب) أحسب $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

(2 بين أنَ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث ، $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5) بين أنه من أجل $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ، $f''(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$ ثم استنتج أنَ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

6) أحسب $f(4)$ أرسم (T) و $(\mathcal{C}_f)$.

7) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-e;e\}$ بـ: $g(x)=f(|x|)$.

أ) بين أنَ الدالة g زوجية .

ب) اشرح كيفية الحصول على $(\mathcal{C}_g)$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسم $(\mathcal{C}_g)$.

__الحل__☺

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x};\ x\in]0;e[\cup]e;+\infty[\\ f(0)=-1 \end{cases}$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) **أ) تبيين أنَ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$ ثم أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين .**

نضع $t=\ln x$ إذا كان $x\xrightarrow{x>0}0$ فإن $t\to-\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} = \lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{1-t}=-1$$

بما أنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=f(0)=-1$ فإن الدالة f مستمرة على يمين 0.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{\ln x}{1-\ln x}+1}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{1}{1-\ln x}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x-x\ln x}=+\infty$$

لأنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x-x\ln x)=0^+$

التفسير: الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند 0 ومنحناها البياني يقبل حامل محور التراتيب مماسا له عند النقطة التي إحداثياها $(0;-1)$

2) **تبيين أنَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ و تفسير النتيجة هندسيا .**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{t}{1-t}=-1$$

التفسير: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=-1$ بجوار $+\infty$.

3) أ) **تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي** x **حيث** ، $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)+\frac{1}{x}\ln x}{(1-\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x+\ln x)}{(1-\ln x)^2}=\frac{1}{x(1-\ln x)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f

من أجل كل $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ يكون $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[0;e[$ و $]e;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	-1 ↗		$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1

4) **كتابة معادلة المماس** (T) **للمنحني** $(\mathscr{C}_f)$ **عند النقطة ذات الفاصلة** 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=1(x-1)$ أي $y=x-1$.

5) **تبيين أنه من أجل** $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ، $f''(x)=\frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$ **ثم استنتج أنّ المنحني** $(\mathscr{C}_f)$ **يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .**

تذكير: $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$

من أجل $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ لدينا:

$$f''(x)=\frac{-\left[(1-\ln x)^2+2x\left(-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4}=\frac{-\left[(1-\ln x)^2-2(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-(1-\ln x)(1-\ln x-2)}{x^2(1-\ln x)^4}=\frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$$

إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $1+\ln x$ لأن $x^2(1-\ln x)^3>0$ من أجل كل $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$

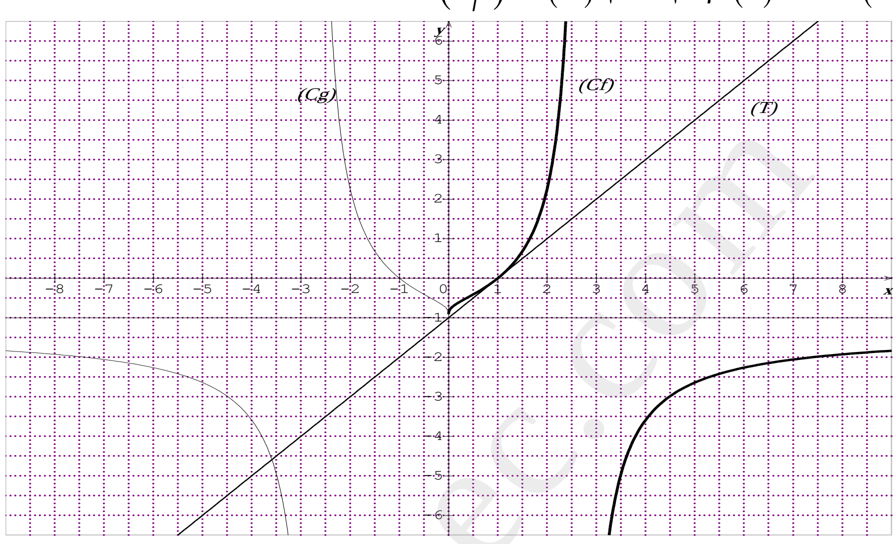
$f''(x)=0$ تعني $1+\ln x=0$ وتكافئ $\ln x=-1$ أي $x=\frac{1}{e}$

$f''(x)>0$ تعني $1+\ln x>0$ وتكافئ $\ln x>-1$ أي $x>\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم عند العدد $\frac{1}{e}$ وتغير من إشارتها و منه النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\frac{1}{e};-\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

6) **حساب** $f(4)$ **ثم ارسم** (T) **و** $(\mathcal{C}_f)$**.**



7) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-e;e\}$ بـ : $g(x)=f(|x|)$.

أ) تبيين أنَ الدالة g زوجية .

لدينا D_g متناظر بالنسبة لـ 0

$g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$

ت) شرح كيفية الحصول على $(\mathcal{C}_g)$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسم $(\mathcal{C}_g)$.

$$\begin{cases} g(x)=f(x);x\in[0;e[\cup]e;+\infty[\\ g(x)=f(-x);x\in]-\infty;-e[\cup]-e;0] \end{cases}$$

لما $x\in[0;e[\cup]e;+\infty[$ يكون $(\mathcal{C}_g)$ منطبق على $(\mathcal{C}_f)$ وبما أن الدالة g زوجية فإن $(\mathcal{C}_g)$ يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب